A KÖZGAZDASÁGTAN ÉS A MATEMATIKA

(Módszertani segédlet)

ELŐSZÓ

Ez a kis füzet azt a célt szolgálja, hogy az Elméleti közgazdaságtan című tantárgy elsajátításához adjon segítséget. Tulajdonképpen a tananyag megértéséhez szükséges matematikai apparátusról ad rövid, összefoglaló áttekintést.

Semmiképpen nem szándékoztunk ezzel a rövid összefoglalással helyettesíteni a matematikai analízis előadásokat és gyakorlatokat, erre ez nem is alkalmas és nem is ez a célja.

A füzet azért született, hogy áthidalja azt a tulajdonképpen áthidalhatatlan ellentmondást, amely a következő két tény között feszül: egyfelől az elméleti közgazdaságtan nemigen érthető meg a matematikai analízis ismerete nélkül, másfelől a tanrend szerint a két tantárggyal egyszerre kezdenek ismerkedni főiskolánk elsőéves hallgatói, tehát kezdetben ezek az ismeretek szükségszerűen hiányoznak.

Ebből a füzetből természetesen a hiányzó ismeretek nem sajátíthatóak el, a füzetben olvashatóak megértése is valószínűleg nehézséget okoz annak, aki nem ismeri a matematikai analízis alapjait (például teljesen hiányzik belőle a határérték-fogalom korrekt ismertetése). A füzet nem erre való.

Az itt leírtak egyrészt képet adnak arról, hogy hogyan kapcsolódik az elméleti közgazdaságtan a matematikai analízishez, másrészt mintegy útmutatóul szolgál, hogy a matematikai foglalkozásokon tantárgyunk szempontjából mire célszerű különösen odafigyelni. Ezért azt javasoljuk, hogy a hallgatók folyamatosan forgassák mind az Elméleti közgazdaságtan, mind a Matematikai analízis tanulmányozása közben.

Dr. Nagy András
főiskolai tanár

1. A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS ALAPJAI

1.1. A függvények fogalma

Egy függvény két - sokszor mennyiségileg jellemezhető - halmaz közötti megfeleltetés, azaz az első halmaz (az értelmezési tartomány) egyes elemeihez hozzárendeli a második halmaz (az értékkészlet) egyes elemeit. A legkönnyebben kezelhető függvények az úgynevezett bijekciók, vagy egy-az-egyhez hozzárendelések, azaz olyan hozzárendelés, ahol az értelmezési tartomány minden eleméhez pontosan egy („egy és csak egy") elemet rendelünk az értékkészletből.

Példák:

a) értelmezési tartomány: {fiuk}

értékkészlet: {apák}

függvény: y = x apja,

ahol x a {fiuk} halmaz eleme, y az {apák} halmaz eleme.

Mivel több fiúnak is lehet egy apja, azért ez a függvény nem bijekció.

b) értelmezési tartomány: {11 jegyű számok}

értékkészlet: {Magyarország lakosai}

függvény: y = x személyi száma,

ahol x magyarországi lakos, y egy 11 jegyű szám

Mivel minden Magyarországon lakó embernek más a személyi száma és egy embernek csak egy személyi száma van, ezért ez a függvény bijekció.

Ha egy relációban (hozzárendelésben) az értékkészlet több eleméhez tartozik ugyanaz az értelmezési tartománybeli elem, akkor matematikai értelemben nem beszélhetünk függvényről. Például, az y = x keresztneve, ahol y a keresztnevek halmazának eleme, x viszont a természetes személyek halmazának eleme, nem függvény, mivel egy embernek lehet egyszerre több keresztneve is.

A függvény inverzének nevezzük azt a relációt, amit úgy kapunk, hogy az értelmezési tartományt és az értékkészletet szerepükben felcseréljük. Előző példáinkban az a) függvény inverze: y = x fia. A b) függvényé: y = az x személyi számhoz tartozó személy. Ezekből a példákból is látható, hogy nem minden függvény inverze függvény, hiszen az a) függvény inverze nem függvény - egy apának több fia is lehet. Csak a bijekcióknak függvény az inverze is. Ebből is látszik, hogy a bijekciók a „jó" függvények.

Még „jobbak" azok a függvények, amelyek mérhető mennyiségek között fejeznek ki kapcsolatot. Például valamely súlyra mérhető áru mennyisége és pénzben kifejezett ára között is függvénykapcsolat van: y Ft = x kg áru ára. Az ilyen függvények viselkedése legtöbbször független a két mennyiség mértékegységétől és csak a számokkal kifejezhető mértékek viszonyával kapcsolatos. Ezért az ilyen függvények jól modellezhetőek olyan függvényekkel, amelyek értékkészlete is, értelmezési tartománya is számok valamely halmaza. A matematikai analízis éppen az ilyen függvényekkel foglalkozik.

A számokkal jellemezhető mennyiségek egyik legfontosabb tulajdonsága, hogy halmazaik nagyság szerint rendezhetőek. Ez azt jelenti, hogy e halmazok elemei között értelmezhető az úgynevezett rendezési reláció: a elem nagyobb (kisebb) mint b. Ez a reláció nem csak számok (számokkal modellezhető mennyiségek) között értelmezhető. Például a lexikonok szócikkei is meghatározott rend szerint vannak sorba rendezve, és ez a rend nem azonos a számok nagyságrendjével (ez az úgynevezett lexikografikus rendezés). Másik példa a síkidomok nagyságrendbe rendezése. A hasonló síkidomok között megállapíthatjuk melyik nagyobb, melyik kisebb (az a nagyobb, amelyik lefedi a másikat), de különböző síkidomok (például egy háromszög és egy négyszög) között ez a rendezés nem mindig értelmezhető. A matematika az ilyen relációt félig-rendezettségnek vagy részben-rendezettségnek (semiordering) nevezi. A számokból álló halmazok azonban teljesen rendezettek.

A matematikai analízis tehát alapvetően a (valós) számfüggvényekkel foglalkozik, és eredményei ott alkalmazhatóak, ahol az előforduló függvénykapcsolatok számfüggvényekkel modellezhetőek, számszerűsíthetőek. Nyomatékosítani kell azonban, hogy a matematikai módszerek nem csak a számszerűsíthető függvények esetében alkalmazhatóak, hiszen a matematika nem csupán analízisből áll.

A számfüggvények egy bizonyos szempontból kétféle tulajdonsággal rendelkezhetnek. Lehetnek monoton növekvőek, amikor a nagyobb argumentumhoz (az értelmezési tartomány aktuális elemét kijelölő változót nevezzük argumentumnak vagy magyarázó illetve független változónak) nem kisebb érték (függőváltozó-érték) tartozik mint a kisebb argumentumhoz. Vagy lehetnek monoton csökkenőek, amikor a nagyobb argumentumhoz nem nagyobb érték tartozik mint a kisebb argumentumhoz.

Az a függvény, amely egyszerre monoton nő és monoton csökken, az valójában nem változik - konstans. Például $y = 5$. Valóban 5 nem nagyobb és nem kisebb mint 5, tehát ez a függvény egyszerre monoton növekvő és monoton csökkenő. Csakhogy a konstans függvény nem bijekció, hiszen minden argumentumához ugyanaz az érték tartozik. A bijekciókra szigorúbb megkötés érvényes. A nagyobb argumentumhoz nem nem kisebb (nem nagyobb), hanem kifejezetten nagyobb (kisebb) érték tartozik, amit úgy mondunk, hogy a bijekciók *szigorúan* monoton növekvő (csökkenő) függvények.

1.2. A függvények folytonossága

Egy számfüggvényt általában ábrázolhatjuk a kétdimenziós koordináta rendszerben, ha az egyik tengelyre a független, a másik, merőleges tengelyre a függő változót mérjük fel. A két tengely tulajdonképpen két egymást az origóban (a nullpontokban) metsző számegyenes, amelyek segítségével a valós számpárokat geometriailag a sík pontjaival jeleníthetjük meg. A megjelenített függvény képe egy meghatározott terjedelmű és alakú ponthalmaz lesz, amit szokás a függvény grafikonjának, ábrájának nevezni. A komolyabb halmazelméleti munkák a függvény grafikonján magát a számpár-halmazt értik, nekünk azonban elegendő, ha grafikonon a geometriai modellt, a papírra rajzolható ponthalmazt értjük. A megkülönböztetésre egyébként azért van szükség, mert vannak olyan „rossz“ függvények (sőt ők vannak többen), amelyek grafikonját ugyancsak nehéz lenne lerajzolni. Az egyik legnevezetesebb ilyen „rossz“ függvény Dirichlet függvénye, amelynek értéke 1, ha az argumentuma racionális szám és 0, ha az argumentum irracionális. Ezt a függvényt egyáltalán nem lehet lerajzolni, de azért grafikonja van: olyan halmaz amelynek elemei (a,1) és (b,0) alakúak, ahol *a* racionális, *b* irracionális szám. Az összes lehetséges ilyen elem adja a Dirichlet-függvény grafikonját.

Szerencsére ilyen nem lerajzolható grafikonú függvények a közgazdaságtanban nem igen fordulnak elő. Van azonban más probléma. A közgazdasági változók általában úgynevezett diszkrét változók, a függvények diszkrét függvények. Ez azt jelenti, hogy a változó csak egyes, a számegyenesen különálló értékeket vesz fel s a függvény argumentuma diszkrét változó, tehát grafikonja a síkban különálló pontok halmaza. Az ilyen függvényekkel a szűkebben értelmezett matematikai analízis semmit sem tud kezdeni.

Ha egy diszkrét függvény grafikonját elég messziről nézzük, vagy a koordináta rendszer osztását elég kicsire választjuk, akkor a szem illetve a rajzeszköz véges felbontása miatt a függvény grafikonja összeolvad. Sok esetben ez az összeolvadt kép elméletileg többé-kevésbé megmagyarázható s így az összefüggő vonal(ak)kal megjelenített függvény az eredeti gazdasági összefüggések jó modelljeként használható. Az ilyen típusú modell kétféleképpen jöhet létre:

a) a valóságban nem osztható egységeket (árucikkek, eszközök stb.) végtelenül oszthatónak tételezzük fel és így töltjük ki a két diszkrét pont közötti hézagot. Ekkor a diszkrét függvény grafikonja belesimul a modellező függvény grafikonjába. Ezt az eljárást *interpolálásnak* nevezik, a modell-függvényt *interpolációs görbének.*

b) az empirikus diszkrét értékeket statisztikai mérések eredményeként kezeljük, amelyek pontossága nem 100 százalékos. A diszkrét ponthalmazon olyan görbét fektetünk keresztül, amelynek eltérései valamilyen statisztikai megfontolás szerint a legkisebbek a diszkrét értelmezési tartományon. Ez a módszer az *ökonometria* módszere, a modell-függvény a vizsgált összefüggés *trendvonala*, amely a diszkrét ponthalmaz tendenciáját jelöli ki. Lehetséges, hogy a trendfüggvény és a diszkrét függvény grafikonjainak egyáltalán nincs közös eleme (pontja).

A fenti két módon nyert közelítő függvények már összefüggő vonaldarabokból állnak, nem biztos azonban, hogy egy vonallal felrajzolhatóak. Ha igen akkor folytonosak, ha nem, akkor csak szakaszosan folytonosak és úgynevezett szakadási pontjaik vannak.

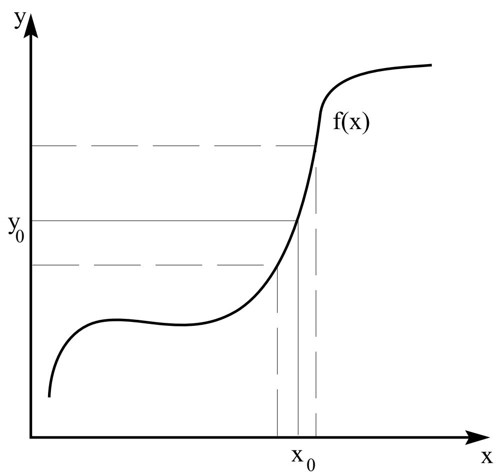
A függvények felrajzolása sokat segíthet a szemléltetésben, de korrekt matematikai fogalomalkotásra és bizonyításokra az ábrák nem igen alkalmasak. Így a folytonosság fenti - szemléletes - leírása sem tekinthető korrekt, s ami fontosabb, használható definíciónak. A korrekt definíció kissé körülményes ugyan, de nagyon hatékonyan használható.

Az $y=f(x)$ függvény az x_0 pontban akkor folytonos, ha bármilyen kis $\delta>0$ számhoz találunk olyan $\varepsilon>0$ számot, hogy

$$|f(x)-f(x_0)|<\delta$$

minden olyan x-re, amelyre

$$|x-x_0|<\varepsilon.$$



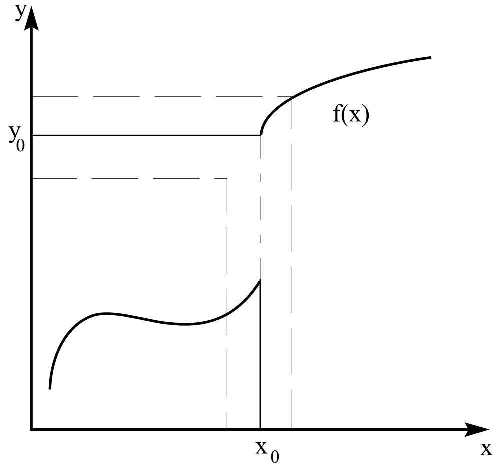
1. ábra

Az 1. ábrán a függvény az x_0 pontban folytonos. Bármilyen közel választjuk az y_1 illetve y_2 értékeket az

$$y_0=f(x_0)$$

értékhez ($y_1>y_0$ $y_2<y_0$) mindig találunk a megadott szegmensen belül olyan $x_1>x_0$ illetve $x_2<x_0$ argumentumokat, melyekre

$$y_1>f(x_1)>f(x_0) \text{ illetve } y_2<f(x_2)<f(x_0).$$



2.ábra

Ugyanez a 2. ábra függvényére nyilvánvalóan nem igaz, hiszen az y_0 érték alatti szakaszon végtelen sok olyan y érték van, amelyekhez az adott szegmensen belül nincs megfelelő x érték, amelyre $y<f(x)$ igaz lenne.

Azt a függvényt nevezzük folytonosnak, amely minden pontjában folytonos. Amelynek véges (vagy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen) számú szakadási pontja (azaz olyan pontja, amelyben a függvény nem folytonos) van, az szakaszosan folytonos. A fentebb említett Dirichlet-függvény viszont egyetlen pontjában sem folytonos. S bár ilyen „rossz“ függvény „sokkal több“ van mint folytonos és szakaszosan folytonos, a körülöttünk levő világot, különösen a gazdasági életet, egész jól le lehet írni ezekkel a „jó“ - folytonos és szakaszosan folytonos függvényekkel.

1.3. A közgazdaságtani függvények ábrázolásának néhány sajátossága

Láttuk, hogy a matematikában az (egy és kétváltozós) függvényeket a grafikonjaik segítségével ábrázolják. Az egyváltozós függvényeknél a matematikusok hallgatólagos megegyezéssel a független változót a vízszintes tengelyen, a függő változót a függőleges tengelyen ábrázolják. Pontosabb lenne persze azt mondani, hogy a függvény értelmezési tartományát a vízszintes tengelyként szereplő számegyenes részhalmazaként, az értékkészletet a függőleges tengelyként szereplő számegyenes részhalmazaként értelmezik.

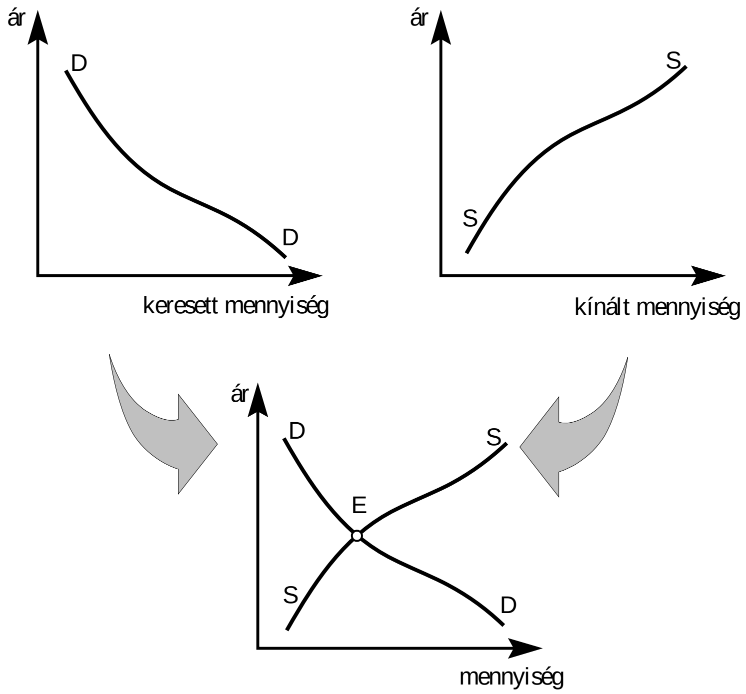
A közgazdaságtanban – mint arra már utaltunk - ez nem egészen így van.

- Először is a közgazdaságtani változók mértékkel rendelkező valódi mennyiségek, nem számok – a számegyenes részhalmazai csak modellezik ezeket a mennyiségeket. Ez azért fontos, mert amíg a tiszta matematikában (pontosabban a valós analízisben) alkalmazott koordináta-rendszerek valamennyi tengelye egynemű – valamennyi számegyenes – addig a közgazdaságtani függvényeknél mindig pontosan tisztázni kell a tengelyekre mért mennyiségek mértékegységét is. Ezért a közgazdaságtani függvények ábrázolásánál mindig pontosan meg kell nevezni a tengelyeket! Ennek elmulasztása értelmezhetetlenné, használhatatlanná teheti ábránkat.

- Másodszor a közgazdaságtani változók jelentős részénél nem értelmezhető a negatív nagyság. Ezért sok közgazdaságtani függvényt nem a teljes koordináta-rendszerben modellezünk, hanem csupán az origóból induló nem negatív szám-félegyenesek közé zárt térrészletben, az úgynevezett pozitív ortánsban. A közgazdaságtani irodalomban gyakran láthatunk olyan ábrákat, amik látszólag egy koordináta-rendszer ortánsai, valójában több különböző koordináta-rendszer egymáshoz illesztett pozitív ortánsairól van szó. Itt az előző megjegyzésünkben jelzett „minősített" tengelyek játszanak szerepet. Az összeillesztés ugyanis olyan tengelyek mentén történik, amelyeknek azonos a mértékegységük. Ez legegyszerűbb esetben azt jelenti, hogy az összeillesztett tengelyekre ugyanazt a közgazdaságtani változót mérik rá, de ez nem feltétlenül szükséges. Elég ha a felmért változóknak ugyanaz a mértékegysége: például az ár-tengelyt össze lehet illeszteni a költség-tengellyel, mert mindkettőt pénzben mérik.
- Azonos mértékegységű tengelyek mentén nem csak egymás mellé lehet rajzolni a koordináta-rendszerek pozitív ortánsait. Ha két koordináta-rendszer tengelyeinek páronként ugyanaz a mértékegysége, akkor ezeket egymásra is lehet rajzolni. Ilyenkor az ábrázolt függvények grafikonjai látszólag akár metszhetik is egymást. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a grafikonoknak valóban van közös pontjuk, hiszen ezek a grafikonok nem ugyanannak a térnek a részhalmazai. Gyakran használt tipikus példa erre az esetre az úgynevezett Marshall-kereszt, amit a piaci folyamatok modellezésére szoktak használni. Ez a „kereszt" egy általában monoton csökkenő függvény, a keresleti függvény (DD) és egy általában monoton növekvő függvény, a kínálati függvény (SS) grafikonjaiból épül fel. A keresleti függvény a termék piaci ára és keresett mennyisége[1] között, a kínálati függvény pedig a termék piaci ára és a kínált mennyisége[2] között teremt függvénykapcsolatot. Itt az két különböző tér (pozitív ortans) egyik tengelye, az ártengely azonos, de a másik tengelypárnál már csak a mértékegység (a termék kereskedelmi mértékegysége) azonos, maguk a mennyiségek minőségileg különbözőek (lásd a lábjegyzeteket). A „metszéspont", a piaci egyensúly pontja, aminek az elméletben kiemelt szerepe van valójában nem metszéspont, a két függvénynek nincs és nem is lehet közös pontja.

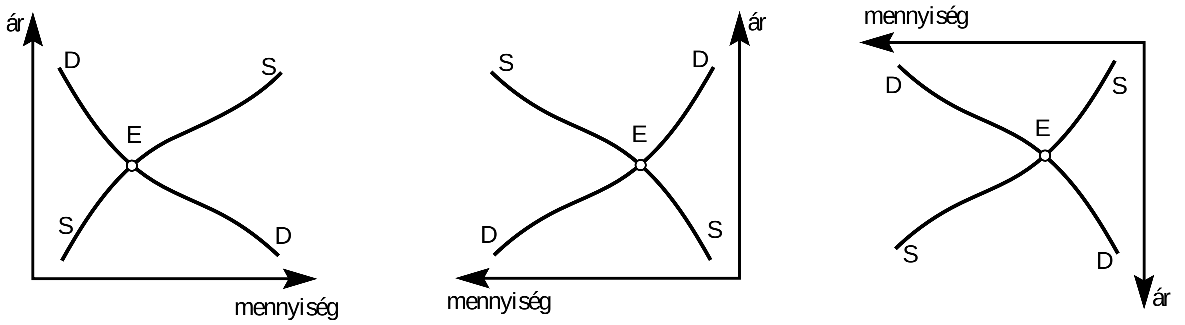
1 A keresett mennyiség a termék azon mennyisége, amelyet az adott áron a vevők képesek és hajlandóak megvenni.

2 A kínált mennyiség a termék azon mennyisége, amelyet az adott áron az eladók képesek és hajlandóak eladni.



3.ábra A Marshall-kereszt

– Azokban az ábrákban, amelyekről az előző megjegyzésekben szó volt, gyakran elkerülhetetlen annak a hallgatólagos elvnek a feladása, miszerint a vizszintes tengely részhalmaza az értelmezési tartomány és a függeleges tengelyé az értékkészlet. Ezt sokszor az egyedülálló ábrákban is megteszik. Ennek a legkülönfélébb okai lehetnek, amikre itt nem kell kitérnünk. Közismert példa erre az éppen most említett Marshall-kereszt és annak két összetevője, a keresleti és a kínálati függvények. Mindhárom esetben a független változó tengelye a függőleges, és a vizszintes tengelyeken a függő változókat ábrázolják. Felkészületlen szemnek az a legkellemetlenebb, amikor a pozitív ortansnak nem csak a tengelyeit cserélik fel, hanem a tájolását is: azaz nem az „észak-keleti” ortánsként jelenik meg, hanem például az „észak-nyugati”, vagy egyenesen a „dél-nyugati” ortánsként. Ime a Marshall-kereszt néhány elforgatása:

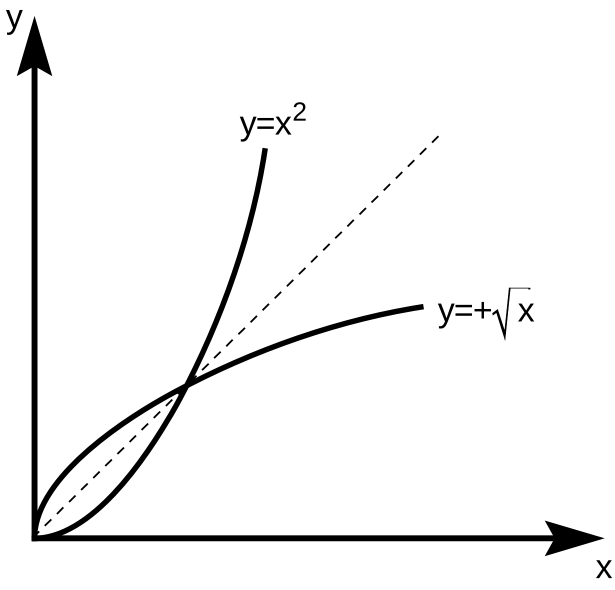


4. ábra

Itt nagyon fontos megérteni, hogy a 4. ábrán mind a három ábrázolás pontosan ugyanazt ábrázolja! Ez különösen a másodiknál lehet zavaró, hiszen itt is a DD a monoton csökkenő, és SS a monoton növekvő függvény – minden látszattal szemben. Sokat segít a tévedés elkerülésében, ha megszokjuk, hogy az origót és a tengelyeket valóban viszonyítási pontnak tekintsük, és felejtsük el a „lefelé, felfelé”, „jobbra, balra” tipusú relatív tájolásokat.

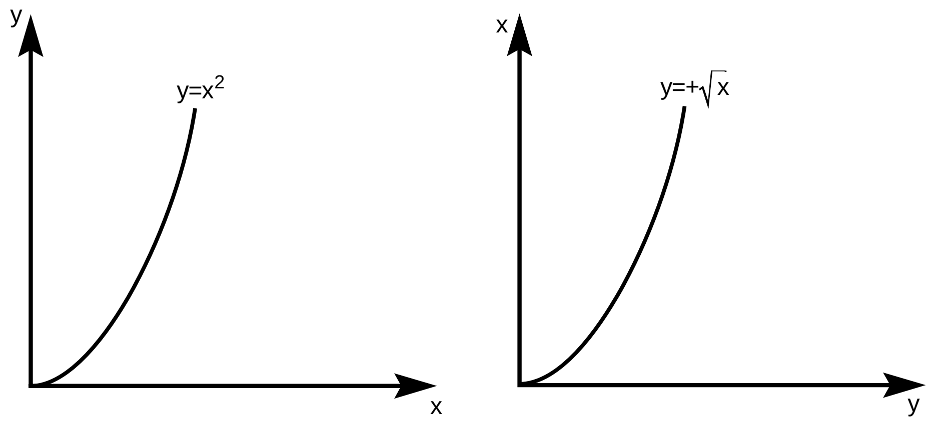
A matematika tankönyvek az inverz függvények ábrázolását az eredeti függvény grafikonjának a 45 fokos sugárra történő tükrözésével oldják meg. A (matematikai) közgazdaságtani irodalomban viszont igen gyakran úgy beszélnek az inverz függvényről, mintha az azonos lenne az eredeti függvénnyel. Például a monopóliumok vizsgálatánál azt bizonyítják, hogy a piaci keresleti függvény egybeesik a monopól helyzetben levő vállalat átlagárbevételi függvényével. Csakhogy a piaci kereslet függvénye a piaci ár függvényében ábrázolja a keresett mennyiséget, míg az átlagárbevételi függvény a termelt mennyiség függvényében ábrázolja az átlagos (egy termékre jutó) árbevételt. Anélkül, hogy a problémát teljes mélységében megvizsgálnánk, annyi látható, hogy a keresleti függvény értelmezési tartománya a pénzben mérhető ár-tengely részhalmaza, az értékkészlete pedig a termék kereskedelmi mértékegységében mért keresett mennyiség tengely részhalmaza, ezzel szemben az átlagárbevételi függvény értelmezési tartománya a termék kereskedelmi mértékegységében mért termelt mennyiség tengely részhalmaza, az értékkészlete pedig a pénzben mért átlagos árbevétel tengely részhalmaza. Vagyis a két függvény legjobb esetben is egymásnak inverze (ismétlem, ez bizonyítható, de a bizonyítást meghagyjuk a közgazdaságtan tankönyveknek). Akkor most kinek van igaza, a matematikusoknak, vagy a matematikai közgazdászoknak? Elfogultság nélkül állíthatjuk, hogy inkább az utóbbiaknak.

Vizsgáljuk meg a problémát egy egyszerű függvényen: $y = x^2 \ (x \geq 0)$. Ennek inverze a matematikusok szerint $x = y^2 \ (y \geq 0)$ azaz $y=+\sqrt{x} \ (x \geq 0)$. A két függvény grafikonja (ismét a matematikusok szerint!):



5. ábra

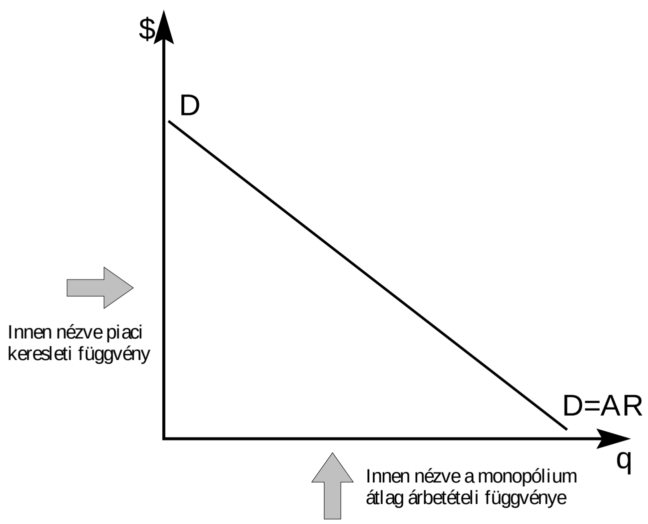
Csakhogy olvassuk el mégegyszer az inverz függvény definícióját! „A függvény inverzének nevezzük azt a relációt, amit úgy kapunk, hogy az értelmezési tartományt és az értékkészletet szerepükben felcseréljük.” Tehát az inverz függvény értelmezési tartománya a vízszintes tengelyről át kell, hogy kerüljön a függőlegesre és fordítva az értékkészlete a függőlegesről a vízszintesre! Így voltaképpen a két függvény nem is ábrázolható egy koordináta-rendszerben. Tehát



6. ábra

Vagyis azt látjuk, hogy az eredeti és az inverz függvény ugyan nem azonos, de a grafikonjuk igen. Mielőtt nagyon megrónánk a matematikusokat, állapítsuk meg, hogy az 5. ábra mégis helyes, ugyanis az x tengely pontosan ugyanaz a (fél)számegyenes, mint az y tengely, így a 6. ábra jobb oldali koordináta-rendszerét nyugodtan tükrözhetjük a 45 fokos sugárra és ekkor az azonos tájolásuvá válik a baloldalival és egymásra helyezhetőek. Természetesen a tükrözés a koordináta-rendszerben elhelyezkedő grafikonra is vonatkozik, így az eredmény valóban az 5. ábra lesz.

Mindez azonban nem tehető meg a közgazdasági ábrákkal, hiszen a két tengelynek nem azonos a mértékegysége. Ezért ott a grafikonok azonosak maradnak és az eredeti függvényt máshonnan kell néznünk, mint az inverzet. A korábbi példánál maradva:



7. ábra

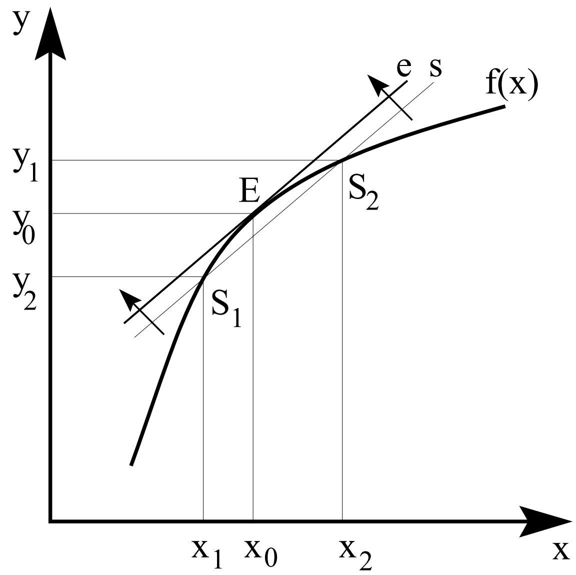
1.4. A deriválás fogalma

A folytonos függvények grafikonjai, mint láttuk, egybefüggő vonalak, görbék. Ezek a vízszintes tengelyhez képest (a matematikusok ezen a tengelyen szokták elhelyezni az értelmezési tartományt, ezt a tengelyt szokták a független változó tengelyének választani - a matematikai közgazdaságtan nem mindig tartja be ezt a megállapodást) hol meredek hegyoldalként emelkednek, hol lefelé futó lejtőként süllyednek. Már tudjuk, hogy az első esetben az adott szakaszon a függvény monoton növekvő, a másodikban - monoton csökkenő. Azonban általában az emelkedés illetve süllyedés mértéke változó. Sok esetben éppen ez a mérték lehet az érdekes. Ha ezt a mértéket a függvény minden pontjában meg lehet állapítani, akkor egy új függvényhez jutunk, ami az eredetiből származik. Ezt a függvényt az eredeti származtatott, derivált függvényének nevezik. Nem minden folytonos függvény deriválható minden pontjában. Ha a függvény egy pontig meredeken emelkedik, majd ettől a ponttól meredeksége hirtelen megváltozik, például ellenkezőleg süllyedni kezd, akkor ebben a pontban a görbe megtörik és itt a deriválás nem végezhető el. Ha ugyanis balról nézzük, más lesz a meredekség mértéke, mint ha jobb felől nézzük.

Miként a Dirichlet függvénye egyetlen pontjában sem folytonos, ugyanúgy konstruálhatóak olyan folytonos függvények, amelyek egyetlen pontjukban sem deriválhatóak. Ezek a „csodabogár“ függvények is többen vannak, mint a „rendes“ deriválható függvények de a deriválható függvények „elég sokan“ vannak ahhoz, hogy a legtöbb problémát velük megfogalmazhassuk.

A függvények szakadáspontjaikban természetesen nem deriválhatóak, de a szakaszosan folytonos függvényekhez hasonlóan beszélhetünk szakaszosan deriválható függvényekről is.

Mi a lényege a deriválás műveletének? Nézzük meg a 8. ábrát!



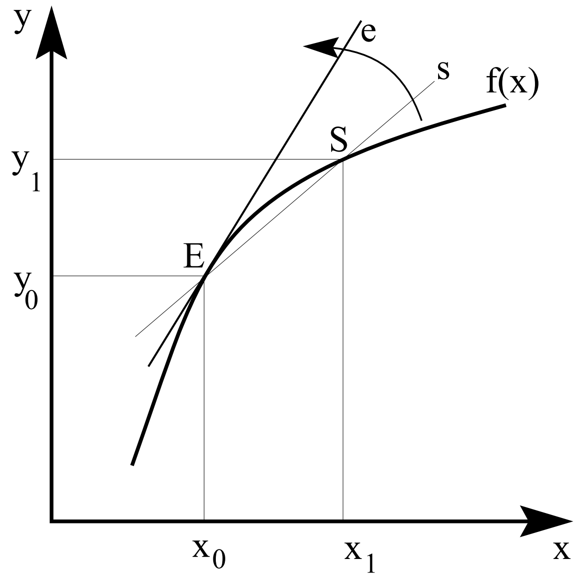
8. ábra

Az s szelő az f függvény grafikonját az S_1 és S_2 pontokban metszi. Ennek a szelőnek a meredekségét a koordinátageometriából ismert módon számíthatjuk ki:

(1) $$m_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ha az S pontokat közelítjük az E ponthoz, akkor az s szelő elindul az e érintő felé, meredeksége egyre közelebb kerül az érintő, s így az f függvény x_0-ban mérhető meredekségéhez. Bebizonyítható, hogy a közelítés közben kiemelt bármelyik szelősorozat meredekségeiből összeállított végtelen számsorozat konvergál egy számhoz, ami az E pontba húzott érintő meredeksége lesz.

Most pedig nézzük meg a következő ábrát:



9. ábra

Itt a szelő az E pont körül fordul bele az érintőbe. Ez más fajta megközelítés, de az eredmény ugyanaz.

Ami közös a két megközelítésben, az a következő: a függvény meredekségét az adott pontban egy hányados határértékeként kapjuk meg, amely hányados nevezőjében két argumentum-érték különbsége, differenciája áll (az adott pont argumentuma mindig benne van a két argumentum-érték által határolt szegmensben), a nevezőben pedig az argumentum-értékekhez tartozó függvényértékek differenciája. A szelők meredekségei differenciák hányadosaiként számítódnak ki, s a függvény deriváltja az adott pontban e differenciahányadosok határértéke, ha az argumentum differenciája tart a nullához. Mivel a deriválható függvény szükségszerűen folytonos, ezért nyilvánvalóan az argumentum-differencia nullához tartásával a függvény-differencia is tart a nullához.

A nulla osztva nullával kifejezésnek nincs értelme (formálisan 0/0 egyenlő bármilyen számmal és ez ellentmond az egyenlőség tranzitivitásának), de itt nem erről van szó, hanem olyan differenciák hányadosairól, ahol a nevező per definíció soha nem nulla, csupán sorozata tart a nullához. Az (1) alakú differenciahányados itt leirt határértékét kétféleképpen szokták jelölni a matematikában:

a) Newton jelölése[3]: $f'(x_0)$ vagy $f'_{x=x_0}$

b) Leibnitz jelölése: $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ vagy $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$

A b) jelölés alapján a deriválás eredményét, az f függvény deriváltját szokás az f függvény (x szerinti) differenciálhányadosának is nevezni. Mindamellett, súlyos hiba lenne a b) jelölést valóságos hányadosként (df és dx hányadosaként) kezelni. A d/dx szimbólum pontosan ugyanazt jelenti, mint az a) jelölésben a felső vessző: a deriválás műveletét. Ez a művelet egy függvényt, a deriváltat vagy differenciálhányadost, rendeli az eredeti függvényhez, ezért (függvény)operátornak is nevezik.

[3] Tulajdonképpen Newton nem egészen ezt a jelölést használta, hanem az $\dot{f}(x)$ írásmódot.

1.5. A derivált interpretációi

A derivált legkézenfekvőbb interpretációját tulajdonképpen már láttuk: egy folytonos (és deriválható) függvény grafikonja pontonkénti meredekségét írja le. Ez az interpretáció a matematikai közgazdaságtanban széleskörben használatos, jóllehet közgazdasági tartalma nem igen van. Általában megfordítva alkalmazzák: amennyiben ismeretes egy görbe menete, akkor azt a deriváltjával írhatjuk le röviden és matematikailag korrektül. Például a monoton növekvő függvényt azzal jellemezhetjük, hogy a deriváltja minden pontban nem negatív, a szigorúan monoton növekvő függvénynek a deriváltja viszont minden pontban pozitív. Ellenkezőleg, a monoton csökkenő (szigorúan monoton csökkenő) függvények deriváltja nem pozitív (negatív). A konstans függvény deriváltja minden pontjában zérus.

Egy másik interpretáció a fizika területéről származik: egy mozgó test x idő alatt y=f(x) távolságot tesz meg, hol gyorsabban, hol lassabban haladva. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy adott x_0 időpontban mekkora a sebessége a testnek, akkor az adott időpontot magábafoglaló mind kisebb időintervallumokban kiszámítjuk az adott intervallumok átlagsebességét: az intervallum végén mért távolságból kivonjuk az intervallum elején mért távolságot, így megkapjuk az intervallum alatt megtett utat és ezt osztjuk az időintervallum hosszával. Az így kapott átlagsebességek az f útfüggvény differenciahányadosai. Az adott időpont sebessége ezen átlagsebességek határértéke, tehát a sebességfüggvény az útfüggvény deriváltja. Ezt általánosítva, ha ismerjük valamely jelenség változásának függvényét, akkor e változás sebességét a változásfüggvény deriválásával határozhatjuk meg.

Ezt a sebességinterpretációt alkalmazhatjuk magára a függvény meredekségének változására is. Ha egy (szigorúan) monoton növekvő függvény meredeksége egyre kisebb, vagyis a függvény „egyre lassabban növekszik“, akkor e függvénynek ugyan nem negatív (pozitív) a deriváltja, de maga a derivált, mint függvény monoton csökkenő lesz és így a második derivált (a derivált deriváltja f'') nem pozitív (kisebb vagy egyenlő 0) lesz. A közgazdaságtanban ez a „csökkenő hozadék“ ismert esete.

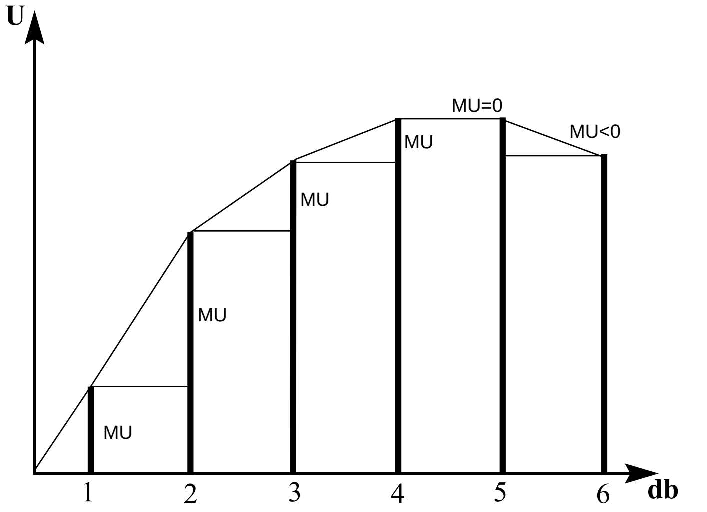
Végül (de nem utolsó sorban) egy tipikus közgazdaságtani interpretáció: a határhaszon fogalma.

A közgazdaságtanban ismeretes, hogy diszkrét javak esetében a határhaszon egyenlő az összes elfogyasztott jószág közül az utolsó jószág által kiváltott haszonhatással. Ezt úgy lehet kiszámítani, hogy az adott fogyasztás összhasznából kivonjuk az eggyel kevesebb jószág által kiváltott összhasznot. A Gossen-törvény szerint a normál javak esetében a határhaszon egyre csökken az elfogyasztott javak számának növekedésével.

Mi a helyzet, ha a jószág tetszőlegesen osztható, azaz folytonos? Ekkor a fenti értelmezés használhatatlanná válik. Viszont minden folytonos mennyiség tetszőlegesen közelíthető diszkrét mennyiségekkel, egyre jobban darabolva azokat.

Ábrázoljuk a 10, ábrán az összhasznot és a határhasznot egy diszkrét Gossen-jószág esetében:

A határhasznot minden jószág-mennyiségnél az eggyel kisebb mennyiségű jószág összhasznának a levonásával kaptuk meg. Geometriailag ez kis derékszögű háromszögek szerkesztésével oldható meg, ahol a vízszintes befogó hossza egységnyi, a függőleges befogó a U(x)-U(x-1) nagyság a határhaszon. A U függvénnyel az összhasznot jelöltük.



10. ábra

A továbbiakban két dolgot kell meggondolnunk. Az egyik, hogy folytonos jószágot feltételezve a kis derékszögű háromszög átfogója a folytonos összhaszon-függvény szelője lenne, a másik, hogy a derivált meghatározásánál semmi akadálya nem lett volna annak, hogy mindig az éppen vizsgált argumentum-differenciát válasszuk az x tengely hosszúságegységének.

Könnyű belátni, hogy az adott mennyiség határhaszna a derékszögű háromszög átfogójának a meredeksége, azaz e szakasz és a vízszintes tengely közézárt szög tangense.

Minél jobban daraboljuk az adott jószágot, a kis háromszögek átfogói annál jobban belesimulnak az összhaszon deriválható interpolációjába. Vigyázat! az átfogókból kialakuló törtvonal éppen a jószág vizsgált diszkrét mennyiségeinél nem deriválható. Bár szemléletesen nyilvánvalónak tűnik, mégis korrektül bizonyítani kellene, hogy az interpolációs függvény deriválható. Mi most ettől eltekintünk, bár a dolog egyáltalán nem triviális.

Az eddigiek alapján alaposan gyanítható, hogy a folytonos jószágok esetében (márpedig - mint említettük - egy kis hunyorítással minden diszkrét mennyiség folytonosként kezelhető) a határhaszon-függvény az összhaszon-függvény deriváltja. Mindez bizonyítható is. Nyilván itt nincs szó sem valamely görbe vonal meredekségéről, sem valamely folyamat sebességéről. Igaz, mindkettőhöz van valami köze, ám ez mégis egy önálló interpretációja a deriválásnak, amit *marginális ökonómiának* is neveznek.

1.6. A legfontosabb deriválási szabályok.

A függvény deriváltjának az (1) összefüggésből való levezetését következetesen alkalmazva megállapíthatunk néhány fontos deriválási szabályt.

a) két függvény összegének (különbségének) deriváltja:

$$[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$$
$$[f(x)-g(x)]' = f'(x)-g'(x)$$

b) két függvény szorzatának deriváltja:

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

c) két függvény hányadosának deriváltja:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

d) az összetett függvény deriválása:

$$[f(g(x))]' = f'(g)\cdot g'(x)$$

Természetesen ezeknek az összefüggéseknek csak akkor van értelmük, ha mindegyik függvény az adott pontban külön-külön deriválható.

Az összetett függvény deriválási szabálya különösen szemléletes a differenciálhányados jelölési módban:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g)}{dg}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

Vagy egyszerűbben:

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$

Mindamellett ez a jelölés azzal a veszéllyel jár, hogy azt hihetnénk, itt ugyanazok a szabályok érvényesek, mint az egyszerű aritmetikában és a dg „kiegyszerűsíthető“. Ez természetesen nem így van.

1.7. Többváltozós függvények, izokvantok

Ha a sík pontjaihoz térbeli pontokat rendelünk, akkor a korábban meghatározott számfüggvény-fogalom általánosítására nyílik lehetőség.

A térbeli pont három számmal jellemezhető, amelyből egy az illető pontból a síkra bocsátott merőleges hossza (azaz a pont távolsága a síktól), a másik kettő viszont éppen annak a síkbeli pontnak a koordinátái, amelyhez az adott térbeli pontot hozzárendeltük. Az összefüggést a síkbeli és a térbeli pont között tehát tulajdonképpen az első szám, a térbeli pont magassága (a síktól mért távolsága) jellemzi, ez lesz függvényünk függő változója. Független változó viszont kettő van: a síkbeli pont két koordinátája. Ténylegesen most két különböző függvényről szóltunk: egyfelől egy síkbeli pont és egy térbeli pont egymáshoz rendeléséről, másfelől egy rendezett (ahol a sorrend nem mindegy) számpár és egy szóló szám egymáshoz rendeléséről. Ám ez a két függvény vizsgálódásaink szempontjából megkülönböztethetetlenül azonosan viselkedik. A matematikában az ilyesmit *izomorfizmusnak* nevezik. Ilyen izomorfizmussal már eddig is találkoztunk, hisz az egyváltozós függvény és grafikonja között is izomorf kapcsolat van. Az adott esetben tulajdonképpen fordítva jártunk el, ugyanis a sík és a térbeli ponthalmaz egymáshoz rendelése nem más, mint egy meghatározott függvény grafikonja, amely függvény pedig nem más, mint az előbb leirt kétváltozós számfüggvény.

A fogalom tovább tágítható, ha értelmezési tartományában a kétdimenziós teret tetszőleges n méretű térrel cseréljük fel.

Általában az n dimenziós terek, s a felettük értelmezett függvények nem szemléltethetőek, hiszen a papír illetve az iskolatábla síkján már a három dimenziós tér is csak körülményesen ábrázolható. Szerencsére az n dimenziós terek olyan matematikai struktúrával rendelkeznek (úgynevezett lineáris terekről van szó), amely miatt általában a kettő illetve három dimenziós terekre érvényes tételek könnyen általánosíthatóak n dimenziós esetekre is. Az általánosítás módszere rendszerint a középiskolás matematikából ismert teljes indukció módszere (ennek lényege: ha egy állítás összefüggésbe hozható a természetes számok 1, 2, 3, ... sorozatával és egyfelől valamely konkrét számra igaznak bizonyul, másfelől az állítást valamely n számra igaznak tételezve ebből következik, hogy az állítás az n+1 számra is igaz, akkor e két feltétel együttesen az állítás igazát jelenti az adott konkrét számnál nagyobb valamennyi n számra is. Ezt az elvet igen gyakran alkalmazzák, sokszor anélkül, hogy ezt tételesen kimondanák.)

A közgazdasági alkalmazásokban leggyakrabban két többdimenziós tér szerepel:

- az áruk tere, azaz a különböző áruk fajtánkénti mennyiségeiből alkotott vektorok (szám n-esek) tere,
- a termelési tényezők tere, amit a termelési tényezőkre vonatkozóan az áruk teréhez hasonlóan értelmezhetünk.

Ezeknél a tereknél az ábrázolhatóság egyszerűbben megoldható. A módszer lényege a közgazdaságtanban és a statisztikában gyakran alkalmazott aggregáció (összevonás). Kiválasztunk egy árut illetve termelési tényezőt és a többit eggyé aggregáljuk s így jutunk két árus illetve két tényezős modellhez.

Az aggregálás általában problematikus módszer. A legnehezebb problémát az aggregálás alapelvének megtalálása jelenti, hogy tudniillik mely termékek illetve termelési tényezők milyen kritérium alapján vonhatóak össze.

A mikro- és makroökonómiában ez a probléma nem jelentős, ugyanis az ott alkalmazott modellekben az aggregációs alapelv általában adott az áruk illetve termelési tényezők megvásárlására szánt jövedelem illetve a megvásárolt áruk, termelési tényezők össz(haszon)hatása képében.

A kétváltozós függvények grafikonjai háromdimenziós halmazok. Ezek ábrázolása a kétdimenziós síkban lehetséges különböző úgynevezett axonometrikus ábrázolási módban, azonban ezeken az ábrázolásokon meglehetősen nehéz lenne a közgazdaságtan tételeinek illusztrálása. Erre a célra sokkal megfelelőbb egy másik ábrázolási mód, az izokvantok módszere. Ez a módszer jól ismert a térképkészítés, a topográfia területéről. A térképeken a domborzati viszonyokat, három dimenziós jelenségeket a szintvonalak segítségével ábrázolják. A szintvonal azonos magasságú pontok összességét jeleníti meg a térkép síkjában.

A kétváltozós közgazdaságtani függvények síkban történő ábrázolása az izokvantok segítségével történik. Egy izokvanton (ami egy összefüggő vagy szakaszosan összefüggő görbe vonal) azok a síkbeli pontok (árukosarak vagy termelési tényezőkombinációk) helyezkednek el, amelyeknek azonos a mennyiségi (kvantitatív) jellemzőjük: azonos hasznosságúak stb. Innen az elnevezésük: izo(azonos)kvant(mennyiség). Az izokvantok jellegükben hasonlítanak a térképek szintvonalaira, de különbségek is vannak köztük.

Ami az azonosságot illeti, a térképeken szereplő szintvonalakról tudjuk, hogy azok folyamatosan emelkedő-süllyedő felszínek magasságszintjeit reprezentálják, így bármely két szintvonal közé be lehetne rajzolni egy harmadikat, tetszőleges sűrűségben.

Az izokvantok esetében ez mintegy fordítva van ugyanígy. Ha a kétváltozós függvény folytonos (aminek az értelmezése hasonló, bár némileg bonyolultabb, mint az egyváltozós függvény esetében) akkor az izokvantok tetszőleges sűrűségben felrajzolhatóak. Mivel megegyeztünk abban, hogy a mikro- és makroökonómiában alkalmazott modellek vagy interpolációsan vagy trendjelleggel folytonossá vannak téve, ezért a kétváltozós modellek izokvantjai is folytonosan sűrűek.

A fő különbség a topográfiai szintvonalak és az ökonómiai izokvantok között abban van, hogy - tekintettel a geológiai folyamatok viszonylagos lassúságára - gyakorlatilag a térképek szintvonalai időben állandó helyzetet tükröznek, ezzel szemben az izokvantok időben folyton változó gazdasági szituációkat tükröznek. Ennek megfelelően egy gazdasági síkban (az áruk illetve termelési tényezők aggregált kétdimenziós terében) egyszerre több eltérő időponthoz tartozó izokvantsereg ábrázolható.

Ha az ábrán két egymást metsző görbe látható, akkor ez egy izokvant, feltéve, hogy az ábra egy időpontot ábrázol, mivel két azonos idejű izokvant nem metszheti egymást. Két izokvant ugyanis attól kettő, hogy különböző mennyiségeket jelenítenek meg, viszont a metszéspont mind a két izokvant pontja, ami azt jelenti, hogy két mennyiségnek kellene hozzá tartoznia - ami nem lehetséges. Ez azért van így, mert az izokvantok egy függvényt jelenítenek meg. Ha az összefüggés nem lenne függvény, akkor tartozhatna egy ponthoz két (vagy több) érték.

Ezzel szemben az egy ábrán ábrázolt különböző idejű izokvantseregek reprezentánsai természetesen metszhetik egymást. Ezek ugyanis nem egy függvényt jelenítenek meg.

1.8. Parciális deriváltak, teljes differenciál

A többváltozós függvények esetében a deriválás fogalma bonyolultabbá válik, több féle derivált fogalom határozható meg. A mikro- és makroökonómia alapjainak tanulmányozásához elegendő a legegyszerűbb derivált-fogalom, a parciális deriváltak fogalma.

A parciális deriváltak úgy származtathatóak, hogy kiválasztjuk az egyik változót, amelyik szerint a parciális deriválást végre akarjuk hajtani, majd a pontot, amelyben a parciális derivált értékét meg akarjuk határozni. A többi változó értékét az adott pont koordinátáinak megfelelően rögzítve a függvényt tulajdonképpen egyváltozóssá változtatjuk (valójában az így előállított „függvényszelet“ csupán izomorf egy egyváltozós függvénnyel, de ez az izomorfia éppen elég is). Ezt az „egyváltozós függvényt“ deriváljuk az adott változó szerint és ez a derivált lesz a többváltozós függvény parciális deriváltja az adott pontban az adott változó szerint.

A parciális deriváltnak is kétféle jelölése van. Az egyik a Newton-féle vesszős jelölés, ahol alsó indexben tüntetik fel azt a változót, amelyik szerint a deriválás történt. A másik a Leibnitz-féle differenciálhányados jelölés, ahol a parciális deriválást azzal jelölik, hogy d betű helyett az írott kis görög delta betűt (∂) használják. Ez teljesen formális jelölés, a parcialitás tényén kívül mást semmit nem jelent. A parciális deriváltakra, ha ugyanahhoz a változóhoz tartoznak, a korábban tárgyalt deriválási szabályok érvényesek (összeadás-kivonás, szorzás-osztás, összetett függvények stb.).

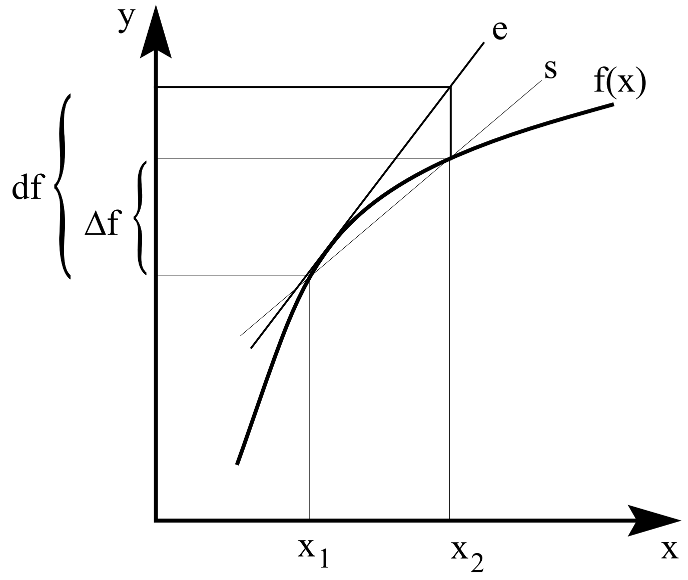
A mikro- és makroökonómiában a különböző mennyiségek határnövekményének leírására gyakran használják a differenciál fogalmát. Ennek értelmezése egyváltozós függvény esetében eléggé egyértelmű. Mint korábban, a derivált fogalmának levezetésekor láttuk, a független változó bármely differenciájához hozzárendelhető a függő változó differenciája. A differenciálhányados (derivált) e differenciák hányadosainak határértékeként lett definiálva, ezért általában az

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_1)\cdot(x_2-x_1)$$

egyenlőség nem áll fenn. Viszont hozzárendelhetünk a független változó differenciájához egy számot, a függő változó differenciálját (df) amelyre a fentihez hasonló egyenlőség definíciószerűen érvényes, vagyis ez az f lineáris közelítése az érintővel:

$$df(x_1) = f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$$

A differencia és a differenciál közötti különbséget a 7. ábra szemlélteti:



11. ábra

Most egy kis ravaszkodást engedünk meg magunknak és megvizsgáljuk egy sajátos függvény differenciálját. Legyen

$$f(x) = x$$

Ekkor $f'(x)=1$ bármely x-re és így

$$dx=df=f'(x)(x_2-x_1)=(x_2-x_1)=\Delta x$$

Ebből a formális összefüggésből adódik általában , hogy

$$df = f'(x)dx$$

ami jól egyezik Leibnitz jelölésével és valamiféle magyarázattal szolgál a differenciálhányados elnevezésre. Ugyanakkor nyomatékkal fel kell hívni a figyelmet arra, hogy ez az egybeesés majdnem a véletlen műve, hiszen ennek a formulának a levezetésekor a derivált fogalmát már ismertük, sőt e levezetésben azt fel is használtuk. Hogy e kifejezés és a Leibnitz-féle jelölés között mennyire formális az összefüggés, az a többváltozós függvény differenciáljának a definiálásakor derül csupán ki.

Az egyváltozós függvény differenciálja tulajdonképpen maga is függvény, mégpedig kétváltozós: df az x és a Δx=dx változók függvénye. Ezt általánosíthatjuk többváltozós függvényekre is. Így jutunk el a többváltozós függvény differenciáljának, a teljes differenciálnak a fogalmához. Ehhez - hasonlóan az egyváltozós esethez - az a feltétel, hogy a vizsgált pontban az összes parciális derivált létezzen. Ebben az esetben

$$df = f'_{x_1} \cdot dx_1 + f'_{x_2} \cdot dx_2 + \ldots + f'_{x_n} \cdot dx_n$$

illetve:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

Ez is függvény. Független változói: x_1, x_2, ..., x_n; dx_1 dx_2, ..., dx_n, azaz 2n darab van belőlük. Közgazdaságilag is alkalmazható interpretációja: egy adott pontban a független változók határelmozdulása által kiváltott határnövekmény a függvény értékében. Látható, hogy egynél több változó esetén a teljes differenciál formulájából nem következik a Leibnitz-féle jelölés.

A teljes differenciálok egészen hasonló szabályoknak engedelmeskednek, mint a deriváltak - természetesen, ha az összeadandó, megszorzandó stb. differenciálok olyan függvényekhez tartoznak, amelyeknek azonosak a független változói:

$$d(f + g) = df + dg$$
$$d(f - g) = df - dg$$
$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$$
$$df(g) = f'_g \cdot g'_x \cdot dx$$

azaz a legutolsó összefüggés a parciális derivált jelölésével:

$$df(g) = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot dx$$

2. AZ INTEGRÁLSZÁMÍTÁS NÉHÁNY ELEME

2.1. A primitív függvény fogalma

Gyakran vetődik fel a probléma, hogy egy f(x) függvényről azt sejtjük, valamely F(x) függvény deriváltja és szeretnénk megtalálni ezt a függvényt. A „derivált“ szó magyarul azt jelenti: származtatott. Ha tehát ismerjük egy - egyelőre ismeretlen függvény deriváltját („származtatottját“), akkor a keresett függvény ennek a deriváltnak az „ősalakja“, primitív függvénye lesz. A primitív függvény keresése tehát a deriválás fordított műveletét jelenti.

Mivel a konstans függvények (f(x)=C) deriváltja a nulla-függvény (f(x)=0), ezért egy függvénynek végtelen sok primitív függvénye van - ha van egyáltalán primitív függvénye. Valóban, ha f függvény primitív függvénye F, azaz ha f=F′, akkor bármely G=F+C függvényre

$$f=G'$$

hiszen a deriválás szabályai szerint

$$G'=F'+C'=f+0=f$$

A deriválással kapcsolatban említettük, hogy léteznek szakaszosan deriválható függvények. Ez sok esetben azt jelenti, hogy a függvény értelmezési tartománya több csatlakozó intervallumra bontható, ahol a csatlakozási pontokban a függvény általában nem deriválható (törési illetve szakadási helyek), s az egyes intervallumokban a derivált más és más elemi függvényekkel irható le. Ezért ha ténylegesen elemi függvényekkel akarjuk megoldani a primitív függvény keresését, akkor helyesebb ezt csak meghatározott intervallumok felett tenni. Sajnos így sem biztos az eredmény. Az a „kellemetlen helyzet“ ugyanis, hogy addig, amíg minden elemi függvény deriváltja elemi függvény, s így a legegyszerűbb elemi függvények deriváltjának ismerete illetve a deriválási szabályok következetes alkalmazása bármely elemi függvény deriválásához elegendő, addig ugyanez fordítva nem így van. Egy elemi függvénynek a primitív függvénye nagyon gyakran nem elemi függvény, így azt zárt formában felírni nem mindig lehetséges.

2.2. A határozatlan integrál

Mivel egy függvény végtelen sok primitív függvénye csak egy konstans (C) erejéig különbözik egymástól, ezért az adott függvény (f) összes primitív függvényének halmaza az összes létező függvények halmazának jól meghatározott részhalmaza. A jól meghatározottság itt azt jelenti, hogy elég megadnunk egy konkrét primitív függvényt (F) és abból az összes többi kiszámítható valamilyen konstans hozzáadásával. Tehát a tetszőlegesen kiválasztott F primitív függvény „reprezentálja“ az összes többit. Ez a reprezentáció egyértelmű, mivel - mint azt fentebb tulajdonképpen bizonyítottuk - ha az adott primitív függvényhez bármilyen konstanst adunk hozzá, az eredmény biztosan a vizsgált függvény egy másik primitív függvénye lesz. Az olyan részhalmazokat, amelyek tetszőleges elemükkel és egy alkalmasan megválasztott hozzárendelési szabállyal egyértelműen reprezentálhatóak (ekvivalencia)osztályoknak nevezik a matematikában. Egy függvény összes primitív függvénye tehát osztályt alkot. Ezt az osztályt a függvény határozatlan integráljának nevezik és

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

(ahol C tetszőleges konstans) jelölik. Az $\int f(x)dx$ jelölés - mint az sejthető - Leibnitztől származik, míg az F(x)+C - természetesen - Newtontól. Vigyázat! Leibnitz jelölése itt is csalóka: a (határozatlan) integrálás műveletének jele itt az $\int .dx$ jelkombináció, ahol dx csupán azt jelöli, hogy a primitív függvény(eke)t melyik változó szerint deriválva kapjuk meg az integrálandó függvényt (az integrandust) vagyis melyik változó szerint integrálunk. Mindamellett ennek a jelölésnek is van némi leibnitzi értelme is.

A matematikai osztályfogalomnak az az értelme, hogy az osztályt kijelölő hozzárendelési szabály keretein belül az osztály (ami egy részhalmaz) azonosítható az őt reprezentáló bármely elemmel. A határozatlan integrál esetében ez azt jelenti, hogy az azonosítható a vizsgált függvény bármely primitív függvényével csak az additív konstansról nem szabad megfeledkezni.

Tehát az f(x) függvény határozatlan integrálja felfogható, mint egy függvény, amit $\int f(x)dx$ jelöl. Képezzük ennek a függvénynek a differenciálját:

(2) $$d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)' \cdot dx = \left(F(x)+C\right)' \cdot dx = F'(x)\cdot dx = f(x)\cdot dx$$

azaz

(2.a) $$d\int f(x)dx = f(x)\cdot dx$$

Másfelől legyen y egy az x-től különböző változó. Tekintsük a g(y)=y függvényt. Ennek deriváltja (y szerint) $g'=1$. Tehát:

(3) $$\int 1dy = \int dy = y + C$$

Most pedig egy kis trükk következik. Legyen y=f(x) amivel (3) a következő alakot ölti:

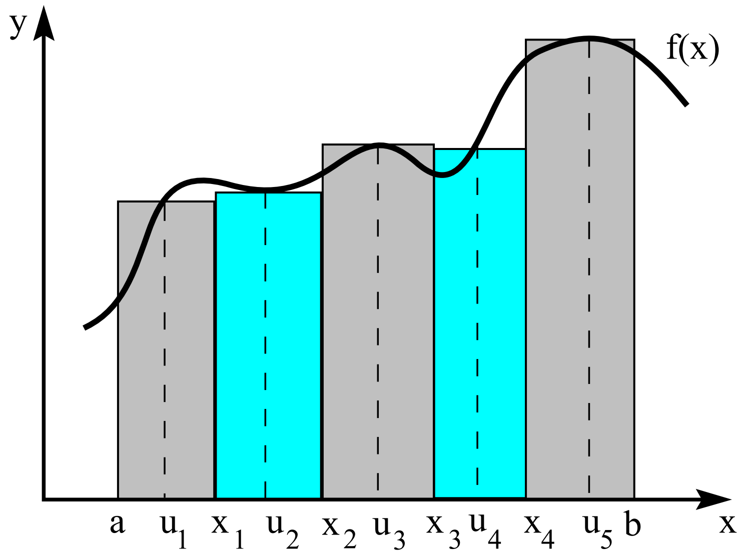
(3.a) $$\int df(x) = f(x) + C$$

A (2.a) és (3.a) alapján azt a - nem túl váratlan - következtetést vonhatjuk le, hogy az integrálás és a differenciálás egymás fordított műveletei. Ez egyrészt azért nem váratlan, mert a primitív függvény keresésének műveletét eleve a deriválás fordítottjaként definiáltuk, másrészt viszont veszedelmesen téves gondolatokat kelthet. A (2.a) egyenlőség két oldalán a dx nem ugyanazt jelenti. A baloldali az integrálás operátorának a része, önálló jelentése nincs. A jobb oldali az x változó differenciálja, tulajdonképpen egy új változó.

Még egyszer felhívjuk a figyelmet arra a sajnálatos tényre, hogy a fenti felettébb tetszetős összefüggések ellenére integrálni sokkal nehezebb, mint differenciálni, részben, mert amíg az elemi függvények deriváltjai mindig elemi függvények, addig az elemi függvények primitív függvényei koránt sem mindig azok, részben pedig azért, mert amíg a derivált néhány deriválási szabály következetes alkalmazásával szinte gépiesen megtalálható, addig még az elemi függvényként felírható primitív függvények sem mindig számíthatóak ki egyszerűen. A deriválásnak *algoritmusa* van, az integrálszámításnak „trükkjei“. Ez utóbbiak ismertetésére ebben a kis módszertani összefoglalóban nincs mód.

2.3. A határozott integrál

Tekintsük a következő ábrát:



12. ábra

Az [a, b] intervallumot szegmensekre bontottuk ([a, x_1), [x_1, x_2), ... , [x_4, b]), s minden szegmens fölé rajzoltunk egy téglalapot, amelynek teteje metszi vagy érinti az f(x) függvény görbéjét. Látható, hogy e téglalapok összterülete valamiféle közelítése a görbe alatti területnek az [a, b] intervallumon. Ez a közelítés annál jobb (ezt bizonyítani kellene!), minél sűrűbben bontjuk szegmensekre az adott intervallumot. A téglalapok összterülete az alábbi formulával adható meg:

(4) $$\sum_i f(u_i)\cdot(x_i - x_{i-1})$$

ahol u_i az i-k szegmens azon pontja, ahol az f(x) függvény metszi illetve érinti a téglalap tetejét, vagyis a téglalap magassága.

Ha $\max(x_i - x_{i-1})$ tart a nullához (ami azt jelenti, hogy valamennyi szegmens hossza tart a nullához, azaz az intervallumot egyre sűrűbben osztjuk fel) akkor a (4) (integrál-)összeg is tart valahová. Ez a valahol vagy létezik vagy sem. Ha igen, azaz az integrálösszegnek van határértéke, akkor ez a határérték lesz az f(x) - Riemann szerint integrálható - függvény határozott integrálja az [a, b] intervallum felett, egyben az f(x) görbéje alatti terület mérőszáma. Szokásos jele:

$$\int_a^b f(x)dx$$

A jelölés és az elnevezés nem véletlenül hasonlít a határozatlan integrál jelöléséhez és nevéhez.

Legyen b maga is változó. Az áttekinthetőbb jelölés végett az integrandus független változóját jelöljük x helyett t betűvel, aminek semmi elvi jelentősége nincs (bármivel jelölhetjük). Az x jelet pedig adjuk annak a változónak, amivé a felső integrálhatárt akarjuk tenni (ami eddig b volt). Legyen tehát

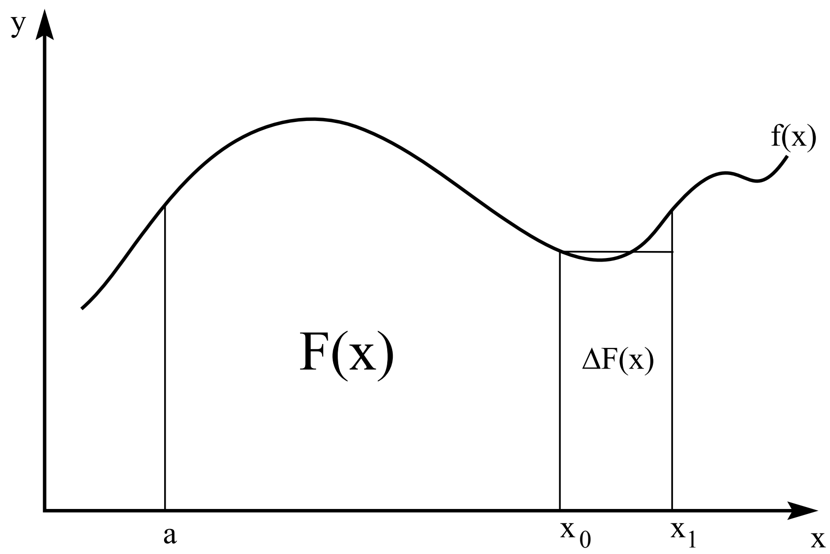
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

A 8. ábrán láthatjuk az F(x) függvényt, mint egy f(x) függvény x=a ponttól vett görbe alatti területe. Az x_0 pont és az x_1 pont között a terület növekménye egyre kisebb, ha x_1 tart x_0-hoz. Ha elég kicsi az (x_1-x_0) különbség, akkor az F növekménye közel egyenlő az $f(x_0)\cdot(x_0-x_1)$ területű téglalap területével. Itt most eltekintünk néhány matematikai finomságtól és ezt a közel-egyenlőséget teljes egyenlőségnek fogjuk fel. Ekkor:

$$F(x_1)-F(x_0)=f(x_0)\cdot(x_1-x_0)$$

azaz

$$\frac{F(x_1)-F(x_0)}{x_1-x_0} = f(x_0)$$



13. ábra

Megismételjük, ez csak közel-egyenlőség, de minél közelebb van x_1 az x_0-hoz, annál inkább az. Határértékként tehát azt kapjuk, hogy F′(x)=f(x), azaz az F(x) az f(x) függvény primitív függvénye. Legyen G(x) az f(x) függvény egy másik tetszőleges primitív függvénye. Ekkor

$$G(x)-F(x)=C$$

ahol C - konstans, azaz:

(5) $$\int_a^x f(t)dt + C = G(x)$$

Az (5)-be rendre a-t és b-t helyettesítve x-be azt kapjuk, hogy:

$$G(a)=C$$

mivel az [a, a] intervallum hossza 0, illetve

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt + C$$

azaz

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Mindebből a szokásos jelölésekre visszatérve következik az úgynevezett *Leibnitz-Newton képlet* a határozott integrál kiszámítására:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ahol F(x) az f(x) függvény tetszőleges primitív függvénye.

A primitív függvények definiciója alapján a Leibnitz-Newton formula még érdekesebben felírható, amennyiben kiemeli az integrálás és a deriválás összefüggését:

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Ez átvezet minket az utolsó fejezetéhez ennek a módszertani vázlatnak.

3. NÉHÁNY MEGJEGYZÉS A DIFFERENCIÁLEGYENLETEKRŐL

Az algebra és az elemi analízis ismert feladata az egyenletmegoldás feladata. Ennek lényege az, hogy egy kijelölt egyenlőség két oldalán függvények állnak, amelyek csak a közös független változó bizonyos értéke(i) mellett egyenlőek valóban. Ez(ek) az érték(ek) az egyenlet megoldása(i), amely(ek) megkeresése a tulajdonképpeni feladat. Általánosabb esetben a függvények nem egy, hanem több változósak, és nem egy egyenletet, hanem több egyenlet rendszerét kell megoldani. A feladat lényege azonban ugyanaz.

A magasabb analízisben olyan egyenletek is előfordulnak, ahol nem változók ismeretlen értékeit, hanem ismeretlen függvényeket keresünk. Ezek a függvények előfordulhatnak különböző rendű deriváltjaik illetve primitív függvényeik alakjában. Tekintettel a fentebb tárgyaltakra, deriválásokkal a primitív függvényektől mindig meg lehet szabadulni (ami korántsem mondható el a deriváltaktól való megszabadulásról integrálással), ezért elegendő azokra a problémákra szorítkozni, amikor az ismeretlen függvény csupán deriváltjaival van jelen:

$$M(x, f(x), f', f'', ..., f^{(m)})=N(x, f(x), f', f'', ..., f^{(n)})$$

Ez az egyváltozós differenciálegyenletek legáltalánosabb formája. Általános algoritmus ezek megoldására nincs. A differenciálegyenletek elmélete a matematikai analízis legnagyobb és legnehezebb fejezete. Mi itt kísérletet sem tehetünk az elmélyedésre. Csupán néhány megjegyzésre szorítkozunk a differenciálegyenleteknek a (matematikai) közgazdaságtanban játszott szerepével kapcsolatban.

A mikro- és makróökonómiában előforduló differenciálegyenlet-problémák - legalább is azon a szinten, amelyen egy bevezető jellegű tanfolyam áll - nem megoldhatatlanok. Két esetben van könnyebb dolgunk, és szerencsére ezek az esetek elég gyakran előfordulnak:

1) igen egyszerű, úgynevezett szétválasztható változójú differenciálegyenlettel van dolgunk, melynek megoldása nem jelent különösebb gondot
2) nem a teljes megoldásra vagyunk kíváncsiak, csupán az ismeretlen függvény alakjának jellegzetességeit keressük (monoton-e, milyen irányban monoton, lassul/gyorsul stb.)

Az első esetre jó példa a lehető legegyszerűbb valódi differenciálegyenlet:

$$f'(x)=g(x)$$

illetve a leibnitzi alakban

$$\frac{df(x)}{dx}=g(x) \qquad (6)$$

Mivel tudjuk, hogy az integrálás a deriválás ellentett művelete, azért a megoldás:

$$f(x)=\int g(x)dx$$

Azon már csak imádkozhatunk, hogy a g függvénynek legyen zárt alakban felírható primitív függvénye. Ha van, mégpedig G(x), akkor a megoldás:

$$f(x)=G(x)+C$$

Ez a feladat megoldható kissé körülményesebben is, amit azért érdemes megnézni, mert vannak olyan differenciálegyenletek, amiket csak így lehet megoldani.

Írjuk fel az ismeretlen f függvény differenciálját, amihez minden feltétel ismert:

$$df(x)=f'(x)dx=g(x)dx$$

Ez az a helyzet, amikor úgy néz ki, mintha az (5) egyenletet átszoroztuk volna dx-szel, holott - mint tudjuk - nem erről van szó.

Mindenesetre most integrálhatjuk mind a két oldalt. A baloldalon alkalmazhatjuk a (3.a) összefüggést:

(7) $$\int df(x) = f(x) + C_1$$

A jobb oldalon a (2.a) és a (3.a) együttes alkalmazására van szükség:

$$g(x)dx = d\int g(x)dx = d[G(x) + C_2] = dG(x)$$

vagyis g(x)dx helyett dG(x) is integrálható (2.a) segítségével:

(8) $$\int g(x)dx = \int dG(x) = G(x) + C_3$$

Mivel az integrálás az egyenlőséget nem változtatja meg, azért (7) és (8) egyenlőek, azaz

$$f(x)=G(x)+C$$

ahol $C=C_3-C_1$ és ami természetesen nem ér minket váratlanul. Tessék megfigyelni az integrációs konstansok precíz kezelését! Jelen esetben ez szőrszálhasogatásnak tűnhetett, de vannak esetek, amikor egyáltalán nem az.

A makroökonómiában ilyen feladattal van dolgunk például Keynes multiplikátorának levezetésénél. Keynes szerint a fogyasztási határhajlandóság egynél kisebb, azaz a legegyszerűbb esetben:

$$C'(Y)=c$$

ahol Y - a (nemzeti) jövedelem

C - a fogyasztás

c - a fogyasztási határhajlandóság ($0<c<1$)

A társadalom Keynes szerint a jövedelemből mindenekelőtt fogyaszt (mégpedig nem elegendőt) majd a megtakarítást beruházza, ha akarja. A kérdés: egy a termeléstől függetlenül elhatározott autonóm beruházásnak (ΔI) milyen hatása van a termelés (jövedelem) növekedésére (ΔY(ΔI))?

A kiinduló pont az ismert összefüggés:

$$Y-C(Y)=I$$

ahol I - a beruházás

Deriváljuk ezt az összefüggést I szerint (hiszen I növekményének a hatását vizsgáljuk):

$$\frac{dY}{dI} - \frac{dC}{dY}\cdot\frac{dY}{dI} = 1$$

vagyis

$$\frac{dY}{dI}\cdot(1-c) = 1$$

azaz

$$\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1-c}$$

Mivel itt most nem az Y(I) függvény az érdekes, hanem ennek a függvénynek a differenciája az I differenciája függvényében, azért kicsit ravaszkodnunk kell. Elvégezzük a fenti séma szerint a változók szétválasztását (ami úgy néz ki, mintha dI-vel átszoroztuk volna az egyenletet):

$$dY = \frac{1}{1-c} dI$$

Integrálva mind a két oldalt:

$$\int dY = Y = \int \frac{1}{1-c} dI = \frac{1}{1-c} I + C$$

Ez lineáris függvény, így hasonló lesz a differenciák viszonya is

$$Y_1 = \frac{1}{1-c} I_1 + C, Y_2 = \frac{1}{1-c} I_2 + C \Rightarrow (Y_2 - Y_1) = \frac{1}{1-c}(I_2 - I_1)$$

azaz

$$\Delta Y = \frac{1}{1-c} \Delta I$$

Ez a híres multiplikátor.

A második esettel tömve van a matematikai közgazdaságtan. Vegyük példának a neoklasszikus egyensúlyelmélet munkakínálati függvényét. Jelölések:

Y - termelési eredmény, jövedelem

N - foglalkoztatottak száma

w - nominális bérszínvonal

P - nominális árszínvonal

Mint ismeretes, a neoklasszikus iskola abból indul ki, hogy a termelési függvény Y=f(N) csökkenő hozadékú, szigorúan monoton növekvő függvény, vagyis $Y'>0$ de $Y''<0$.

Másfelől a munkaadók addig kínálnak munkát, amíg a határárbevételük meghaladja a határkiadásukat, ahol határárbevételnek a termelésnövekmény árbevételét, a határkiadásnak - egyszerűsített statikus modellben gondolkodva - a többletfoglalkoztatottság bérköltségeit értjük. Tehát, ha

$$P\cdot(Y_t - Y_{t-1}) > w\cdot(N_t - N_{t-1})$$

akkor a munkakínálat pozitív.

Határátmenetként mind a belső (ΔY, ΔN), mind a külső (a jobb és a baloldal között fennálló) különbségek a nullához tartanak:

$$P\cdot dY = w\cdot dN$$

azaz

$$dY = \frac{w}{P} dN \tag{9}$$

ahol w/P a reálbér színvonala maga is függ a foglalkoztatástól, és mi éppen ennek a függvénynek (pontosabban az inverzének) az alakjára vagyunk kíváncsiak. Deriváljuk hát a (9) összefüggést a foglalkoztatás szerint. Előbb azonban kövessük el a leibnitzi „csalást“, azaz „osszuk el“ (9)-et dN-nel, azaz hajtsuk végre visszafelé a változók szétválasztását:

$$\frac{dY}{dN} = \frac{w}{P}$$

ami deriválva

$$\frac{d^2Y}{dN^2} = \frac{d\left(\frac{w}{p}\right)}{dN}$$

Mivel pedig az Y(N) függvény második deriváltja negatív, azért a reálbérszínvonal és a foglalkoztatottság között - a neoklasszikus előfeltevések szerint - fordított, szigorúan monoton csökkenő összefüggés áll fenn, vagyis:

$$\frac{d\left(\frac{w}{p}\right)}{dN} < 0$$

- o - O - o -

Ez a rövid vázlat a mikro- és makroökonómiában alkalmazott minimális matematika lényegét kívánta bemutatni a precíz kifejtés legkisebb igénye nélkül. Ugyanakkor igyekeztünk rámutatni azokra a pontokra, ahol nagy a kísértés a precizitás mellőzésére, ami egyes tankönyvekben meg is történik.

Dr. Nagy András

főiskolai tanár

Tartalom